

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

# Mathématiques 1

Oral

TSI

## Exercice avec préparation

Soient  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 2$ . On considère l'application  $u$  définie sur  $E = \mathbb{R}_n[X]$ , par :

$$\forall P \in E, \quad u(P) = (X^2 - X)P(1) + (X^2 + X)P(-1)$$

1. Justifier que  $u$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Seulement dans cette question, on prend  $n = 2$ .

Écrire la matrice de  $u$  relativement à la base  $(1, X, X^2)$  et sans calculs, répondre aux questions suivantes :

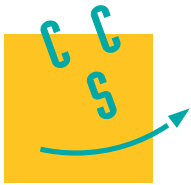
- a. Déterminer une base de  $\text{Ker}(u)$  et une base de  $\text{Im}(u)$ .
- b. L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?
- c. Déterminer les éléments propres de  $u$ .

On revient au cas général.

3. Déterminer une base de  $\text{Ker}(u)$  et une base de  $\text{Im}(u)$ .
4. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de  $u$ .
5. L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?

## Exercice sans préparation

Existence et calcul de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ .



## Exercice avec préparation

On considère les deux surfaces dans  $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{S}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \sin z = y \cos z\}$$

$$\mathcal{S}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$$

1.

a. Représenter  $\mathcal{S}_2$ .

b. Écrire des équations des plans tangents à ces surfaces au point  $A = (1/2, \sqrt{3}/2, \pi/3)$ .

2.

a. Définir deux courbes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  vérifiant

$$\begin{cases} \gamma_1 \cup \gamma_2 = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \\ \gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset \\ A \in \gamma_1 \end{cases}$$

b. Dessiner  $\gamma_1$ . Déterminer la tangente en  $A$  à  $\gamma_1$ .

Soit  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie sur  $\mathbb{R}^3$  par

$$F(x, y, z) = \left( \frac{-x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}, z \right)$$

3. Quel est l'ensemble de définition  $\mathcal{U}$  de  $F$ ? Contient-il  $\mathcal{S}_1$ ?  $\mathcal{S}_2$ ?

4. Montrer que  $F$  est bijectif de  $\mathcal{U}$  sur  $\mathcal{U}$  et de classe  $C^1$ . Écrire sa matrice jacobienne au point  $A$ .

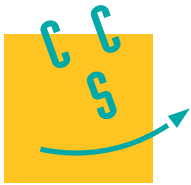
5. Donner des équations des plans tangents en  $F(A)$  aux surfaces  $F(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{U})$  et  $F(\mathcal{S}_2)$ .

6. Identifier la courbe  $F \circ \gamma_1$  et définir sa tangente au point  $F(A)$ .

## Exercice sans préparation

Écrire la matrice, relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ , de la projection orthogonale sur la droite dirigée par

le vecteur  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

# Mathématiques 1

Oral

TSI

## Exercice avec préparation

Soit  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . On définit l'application  $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique par :

$$\forall t \in ]-\pi, \pi], \quad f_\alpha(t) = \cos(\alpha t)$$

1. Dans cette question, on prend  $\alpha = 1/4$ . Représenter graphiquement la restriction de  $f_\alpha$  à l'intervalle  $[-2\pi, 2\pi]$ .

On reprend  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  quelconque.

2. Démontrer que  $f_\alpha$  est paire.

3. Calculer les coefficients trigonométriques de  $f_\alpha$ .

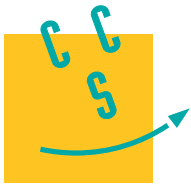
4. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ , on a

$$\cotan(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2}$$

On rappelle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $\sin x \neq 0$ ,  $\cotan(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ .

## Exercice sans préparation

La matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$  est-elle inversible ? Diagonalisable ? Trigonalisable ?



*Il est recommandé d'utiliser le logiciel fourni pour le calcul matriciel*

Soit  $M$  la matrice  $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ . On appelle  $f$  l'endomorphisme associé à  $M$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

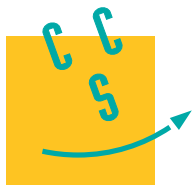
1. Déterminer les valeurs propres de  $M$ .

$M$  est-elle diagonalisable ?

2. Montrer que  $M$  est semblable à la matrice  $T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

3. Déterminer les matrices qui commutent avec  $T$ .

En déduire comment trouver les matrices qui commutent avec  $M$ .



Il est recommandé d'utiliser le logiciel fourni pour le calcul matriciel

Soit  $A$  la matrice  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$ . On appelle  $f$  l'endomorphisme associé à  $A$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Déterminer les valeurs propres de  $A$ .

La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

2. Montrer que  $A$  est semblable à  $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

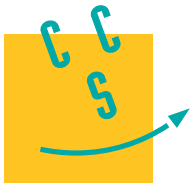
3. Soit  $n$  un entier strictement positif. Calculer  $(A')^n$ . Montrer que,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , il existe trois réels  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  tels que  $(A')^n = a_n I_3 + b_n A' + c_n (A')^2$ .

Déterminer  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$ .

La même relation est-elle vérifiée pour  $A^n$  ?

4. On dit qu'une suite de matrices  $(M_n)_{n \geq 1}$  converge et a pour limite  $M$  si les suites de coefficients de  $M_n$  convergent et ont pour limites respectives ceux de  $M$ .

Trouver pour quels réels  $x$  la suite de matrices  $x^n A^n$  est convergente.



Ce sujet est composé de deux exercices indépendants.

### Exercice 1

L'espace affine euclidien est muni d'un repère orthonormé.

$S$  est la surface d'équation  $(x + y + z)^2 = 4yz$ .

1. Déterminer la matrice associée à cette surface.

À l'aide du logiciel trouver ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

Préciser à quel type de surface appartient  $S$ .

2. Trouver les plans tangents à  $S$  contenant la droite

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

(On trouve deux plans  $P_1$  et  $P_2$ .)

3. Déterminer deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  unitaires et orthogonaux respectivement à  $P_1$  et  $P_2$ .

Quel est l'angle  $\theta \in [0, \pi]$  tel que  $\cos \theta = \vec{u} \cdot \vec{v}$  ?

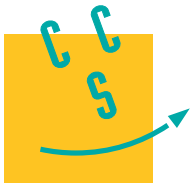
### Exercice 2

1. Montrer que l'intégrale  $\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$  converge.

La calculer. On pourra s'aider du logiciel de calcul formel.

2. Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$  converge.

La calculer. On pourra s'aider du logiciel de calcul formel.



On considère l'équation différentielle  $(1 + x^2)y'' - 2y = 0$ .

On cherche une solution  $S$  sous la forme d'une série entière

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

1. Le logiciel fourni donne-t-il les solutions de cette équation ?
2. On suppose que  $S$  est solution.

$$\text{Montrer que } (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2 - n - 2)a_n = 0.$$

Peut-on simplifier cette égalité ?

3. Montrer que  $\forall n \geq 2, a_{2n} = 0$ .
4. On suppose que  $S(0) = 0$  et  $S'(0) = 1$ .

Déterminer la valeur de  $a_n$  pour tout entier  $n$ .

Préciser le rayon de convergence de la série entière.

5. On pose  $T(0) = 0$  et  $T(x) = \frac{S(x) - 1}{x}$  où  $S$  est la série entière trouvée plus haut.

Calculer la dérivée  $T'$  de  $T$ . (On trouvera une fraction rationnelle simple.)

Trouver la solution  $S$ , en utilisant éventuellement le logiciel fourni pour les calculs de primitives.