CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

Oral

TSI

Exercice avec préparation

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On considère l'application u définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, par :

$$\forall P \in E, \quad u(P) = (X^2 - X)P(1) + (X^2 + X)P(-1)$$

1. Justifier que u est un endomorphisme de E.

2. Seulement dans cette question, on prend $n = 2$.

   Écrire la matrice de u relativement à la base $(1,X,X^2)$ et sans calculs, répondre aux questions suivantes :

   a. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et une base de $\mathrm{Im}(u)$.

   b. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

   c. Déterminer les éléments propres de u.

On revient au cas général.

3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et une base de $\mathrm{Im}(u)$.

4. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de u.

5. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice sans préparation

Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$.

Exercice avec préparation

On considère les deux surfaces dans $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{S}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x \sin z = y \cos z\}$$
$$\mathcal{S}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2 + y^2 = 1\}$$

1.
   a. Représenter $\mathcal{S}_2$.

   b. Écrire des équations des plans tangents à ces surfaces au point $A = (1/2, \sqrt{3}/2, \pi/3)$.

2.
   a. Définir deux courbes γ_1 et γ_2 vérifiant

$$\begin{cases} \gamma_1 \cup \gamma_2 = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \\ \gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset \\ A \in \gamma_1 \end{cases}$$

   b. Dessiner γ_1. Déterminer la tangente en A à γ_1.

Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$F(x,y,z) = \left(\frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}, z\right)$$

3. Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{U}$ de F ? Contient-il $\mathcal{S}_1$? $\mathcal{S}_2$?

4. Montrer que F est bijectif de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}$ et de classe C^1. Écrire sa matrice jacobienne au point A.

5. Donner des équations des plans tangents en $F(A)$ aux surfaces $F(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{U})$ et $F(\mathcal{S}_2)$.

6. Identifier la courbe $F \circ \gamma_1$ et définir sa tangente au point $F(A)$.

Exercice sans préparation

Écrire la matrice, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la projection orthogonale sur la droite dirigée par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Mathématiques 1

Oral

TSI

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Exercice avec préparation

Soit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. On définit l'application $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique par :

$$\forall t \in \left]-\pi,\pi\right], \quad f_\alpha(t) = \cos(\alpha t)$$

1. Dans cette question, on prend $\alpha = 1/4$. Représenter graphiquement la restriction de f_α à l'intervalle $[-2\pi,2\pi]$.

On reprend $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ quelconque.

2. Démontrer que f_α est paire.
3. Calculer les coefficients trigonométriques de f_α.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2}$$

   On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sin x \neq 0$, $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

Exercice sans préparation

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Diagonalisable ? Trigonalisable ?

Il est recommandé d'utiliser le logiciel fourni pour le calcul matriciel

Soit M la matrice $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. On appelle f l'endomorphisme associé à M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer les valeurs propres de M.

   M est-elle diagonalisable ?

2. Montrer que M est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Déterminer les matrices qui commutent avec T.

   En déduire comment trouver les matrices qui commutent avec M.

Il est recommandé d'utiliser le logiciel fourni pour le calcul matriciel

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$. On appelle f l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.

   La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Montrer que A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Soit n un entier strictement positif. Calculer $(A')^n$. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe trois réels a_n, b_n et c_n tels que $(A')^n = a_n I_3 + b_n A' + c_n (A')^2$.

   Déterminer a_n, b_n et c_n.

   La même relation est-elle vérifiée pour A^n ?

4. On dit qu'une suite de matrices $(M_n)_{n\geqslant 1}$ converge et a pour limite M si les suites de coefficients de M_n convergent et ont pour limites respectives ceux de M.

   Trouver pour quels réels x la suite de matrices $x^n A^n$ est convergente.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

Oral

TSI

Ce sujet est composé de deux exercices indépendants.

Exercice 1

L'espace affine euclidien est muni d'un repère orthonormé.

S est la surface d'équation $(x+y+z)^2 = 4yz$.

1. Déterminer la matrice associée à cette surface.

   À l'aide du logiciel trouver ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

   Préciser à quel type de surface appartient S.

2. Trouver les plans tangents à S contenant la droite

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

   (On trouve deux plans P_1 et P_2.)

3. Déterminer deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires et orthogonaux respectivement à P_1 et P_2.

   Quel est l'angle $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\cos\theta = \vec{u}\cdot\vec{v}$?

Exercice 2

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$ converge.

   La calculer. On pourra s'aider du logiciel de calcul formel.

2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$ converge.

   La calculer. On pourra s'aider du logiciel de calcul formel.

On considère l'équation différentielle $(1+x^2)y'' - 2y = 0$.

On cherche une solution S sous la forme d'une série entière

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

1. Le logiciel fourni donne-t-il les solutions de cette équation ?
2. On suppose que S est solution.

   Montrer que $(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2 - n - 2)a_n = 0$.

   Peut-on simplifier cette égalité ?
3. Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $a_{2n} = 0$.
4. On suppose que $S(0) = 0$ et $S'(0) = 1$.

   Déterminer la valeur de a_n pour tout entier n.

   Préciser le rayon de convergence de la série entière.
5. On pose $T(0) = 0$ et $T(x) = \dfrac{S(x) - 1}{x}$ où S est la série entière trouvée plus haut.

   Calculer la dérivée T' de T. (On trouvera une fraction rationelle simple.)

   Trouver la solution S, en utilisant éventuellement le logiciel fourni pour les calcules de primitives.