

## Exercice 1

Soit une fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que :

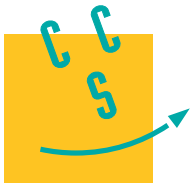
$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad \sin(\varphi(x)) = \sin x$$

1. Montrer que  $\varphi'(x) = 1$  sur  $I_n = ]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$ , pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .
2. En déduire les expressions possibles de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}$ .

## Exercice 2

Soit un entier  $n > 1$ . On pose  $\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; A^2 = I_n\}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{S}$  est fermé dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et infini.
2. Montrer que  $\mathcal{S} \subset GL_n(\mathbb{R})$ . Est-ce un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$  ?
3. L'ensemble  $\mathcal{S}$  est-il compact ?
4. Démontrer qu'il existe un ouvert  $\Omega$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tel que  $\Omega$  ne rencontre pas  $\mathcal{S}$ , à l'exception de  $I_n$ .



## Exercice 1

Soient  $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  et  $\mathcal{H}$  l'hyperbole de  $\mathbb{R}^2$  d'équation cartésienne :

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

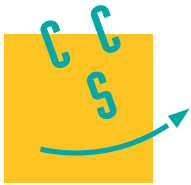
On notera  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  les asymptotes de  $\mathcal{H}$ .

1. Donner des équations cartésiennes de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ , ainsi qu'une paramétrisation de l'hyperbole.
2. Soit  $M$  un point de l'hyperbole. Soient  $A$  et  $A'$  les points de concours de la tangente en  $M$  avec  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ . Montrer que l'aire du triangle  $(OAA')$  est constante.

## Exercice 2

Soit  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  telle que  $M^2 + {}^tM = I_3$  (\*)

1. On suppose, dans cette question seulement, que  $M$  est symétrique. Montrer que :
  - a.  $M$  est diagonalisable et  $\text{tr}(M) \times \det(M) \neq 0$ .
  - b. On suppose  $\text{tr}(M) \in \mathbb{R}_-^*$ . Montrer que la suite matricielle  $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est divergente.
2. On revient au cas général. Prouver que  $M$  est diagonalisable.
3. Montrer que  $M$  est inversible si et seulement si  $1 \notin \text{Sp}(M)$ .
4. Donner un exemple de matrice non symétrique satisfaisant (\*).



## Exercice 1

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $E = \mathbb{R}_n[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ .

1. Montrer que l'application

$$\Phi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0) Q^{(k)}(0)$$

définit un produit scalaire sur l'espace  $E$ .

2. À quoi ressemble la sphère unité pour la norme associée à ce produit scalaire lorsque  $n = 2$  ?
3. Montrer que l'ensemble  $F = \{P(X) \in E \mid P(0) = 0\}$  est un sous-espace de  $E$  et calculer sa dimension, puis la distance  $d(1, F)$ .

## Exercice 2

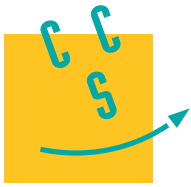
Soit  $p = 2r + 1$  un entier impair. Soit la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis

$$A = \frac{J + J^{-1}}{2} \quad \text{dans } \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

1. Montrer que la matrice  $A$  est diagonalisable.
2. Montrer que la suite de matrices  $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une matrice de projection que l'on précisera.
3. Étudier la suite de polygones  $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans le plan  $\mathbb{R}^2$  définie par :
  - le polygone  $\mathcal{P}_0$  est un polygone comportant  $p$  sommets ;
  - si  $\mathcal{P}_n$  est un polygone comportant  $p$  sommets, on forme le nouveau polygone  $\mathcal{P}_{n+1}$  à  $p$  sommets en remplaçant chaque sommet  $S$  de  $\mathcal{P}_n$  par le milieu du segment  $[R, T]$ , où  $R$  et  $T$  sont les deux sommets entourant le sommet  $S$  dans le polygone  $\mathcal{P}_n$ .



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

# Mathématiques 1

Oral

PSI

## Exercice 1

Trouver toutes les fonctions dérivables  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = xf(-x)$$

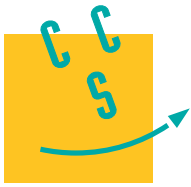
## Exercice 2

Soit  $f : [1, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\frac{f'(x)}{f(x)}$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

1. Démontrer que la série de terme général  $f(n)$  converge.
2. Trouver un équivalent de

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$$

lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

# Mathématiques 2

Oral

PSI

Soit  $A$  la matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & t & t \\ 1 & 0 & t \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où  $t$  est un réel.

On s'aidera du logiciel de calcul formel fourni.

1. Calculer le polynôme caractéristique de  $A$  ? Pour quelles valeurs de  $t$  admet-il des racines multiples ?

Pour quelles valeurs de  $t$  est-il scindé dans  $\mathbb{R}[X]$  ? dans  $\mathbb{C}[X]$  ?

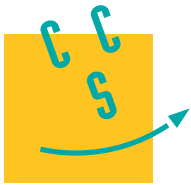
Pour quelles valeurs de  $t$ , la matrice  $A$  est-elle diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ? dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  ?

2. Montrer que si la suite  $(A^n)_n$  converge vers une matrice non nulle alors 1 est valeur propre de  $A$ .

Prouver alors qu'il existe une seule valeur de  $t$ , pour laquelle  $(A^n)_n$  converge vers une matrice non nulle. Que vaut alors la limite ?

Calculer quelques puissances de  $A$  et vérifier le résultat précédent.

3. Trouver toutes les valeurs de  $t$  pour lesquelles la suite  $(A^n)_n$  converge vers la matrice nulle.



1. On considère les deux matrices  $A$  et  $B$ , avec

$$A = \begin{pmatrix} -24 & -48 & -233 & -21 \\ 21 & 41 & 189 & 17 \\ -2 & -4 & -18 & -2 \\ 6 & 14 & 75 & 11 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 60 & 270 & 30 \\ -150 & -321 & -1590 & -150 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 300 & 600 & 2910 & 279 \end{pmatrix}$$

- Vérifier que  $A$  et  $B$  commutent.
  - Vérifier que  $A$  est diagonalisable et préciser ses éléments propres.
  - Déterminer un polynôme  $S$  de degré 3 tel que  $B = S(A)$ .
2. Pour  $n$  entier au moins égal à 2 et  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  on pose

$$\mathcal{C}_M = \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), NM = MN\}$$

- Vérifier que  $\mathcal{C}_M$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  contenant la matrice unité  $I_n$  et stable pour la multiplication des matrices carrées.
- Montrer que pour tout  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$ ,  $P(M) \in \mathcal{C}_M$ .
- A-t-on, pour tout  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , l'égalité

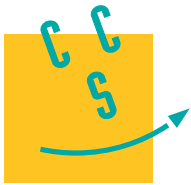
$$\mathcal{C}_M = \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists P \in \mathbb{R}[X] \mid N = P(M)\}$$

3.

- Montrer que

$$N \in \mathcal{C}_A \iff \exists Q \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } N = Q(A)$$

- Déterminer ce polynôme pour les matrices  $A^4$  et  $A^{-1}$ .
- Existe-t-il un polynôme  $Q$  de  $\mathbb{R}[X]$  tel que  ${}^t A = Q(A)$  ?



Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -1, 1[$  par

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} \quad \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout  $x$  de  $] -1, 1[$ ,  $f(x) = \int_0^1 (1+x)^t dt$ .

2. En déduire que  $f$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$ .

On écrira ce développement sous la forme  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  en exprimant  $a_n$  sous la forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

3. À l'aide du logiciel de calcul formel, calculer  $a_0, \dots, a_{10}$ .

Vérifier le résultat en formant le développement limité de  $f$  à l'ordre 10 au voisinage de 0.

4. Pour  $n \geq 1$ , quel est le signe de  $a_n$  ?

5. Montrer que pour tout  $x$  dans  $[0, 1[$  et pour tout entier  $p \geq 1$ ,  $\sum_{n=1}^p |a_n| x^n \leq 1$ . Que peut-on en déduire quant à la série  $\sum a_n$  ?

6. Déterminer théoriquement  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ . Vérifier avec le logiciel de calcul formel.

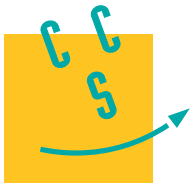
7. Montrer que  $f$  est solution sur  $] -1, 1[$  de l'équation différentielle :

$$(1+x)(xy' - y) + y^2 = 0$$

En déduire que pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$(n-2)a_{n-1} + (n-1)a_n + \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = 0$$

Vérifier pour les premières valeurs de  $n$  à l'aide du logiciel de calcul formel.



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

# Mathématiques 2

Oral

PSI

On considère la surface  $\Sigma$  d'équation dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ,  $F(x, y, z) = 0$  avec

$$F(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 2yz + x - y - z + 3$$

1. Représenter cette surface à l'aide du logiciel fourni.

Quelle est sa nature ? Trouver une équation réduite dans un repère orthonormé que l'on précisera.

2. On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des points  $M$  de  $\Sigma$  tels que la droite  $(OM)$  soit tangente à  $\Sigma$ .

Montrer que  $\mathcal{C}$  est l'intersection de  $\Sigma$  avec le plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $x - y - z + 6 = 0$ .

3. Trouver un repère orthonormé dont le premier vecteur est un vecteur normal à  $\mathcal{P}$  et le second a une composante selon  $\vec{k}$  nulle.

Déterminer l'équation de  $\mathcal{C}$  dans ce repère. Quelle est la nature de  $\mathcal{C}$  ?

Donner un paramétrage de  $\mathcal{C}$  et représenter sur un même graphique  $\Sigma$  et  $\mathcal{C}$ .