CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

*Oral*

# Mathématiques 1

# PSI

## Exercice 1

Soit une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad \sin(\varphi(x)) = \sin x$$

1. Montrer que $\varphi'^2(x) = 1$ sur $I_n = ]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

2. En déduire les expressions possibles de $\varphi$ sur $\mathbb{R}$.

## Exercice 2

Soit un entier $n > 1$. On pose $\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ A^2 = I_n\}$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et infini.

2. Montrer que $\mathcal{S} \subset GL_n(\mathbb{R})$. Est-ce un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ ?

3. L'ensemble $\mathcal{S}$ est-il compact ?

4. Démontrer qu'il existe un ouvert $\Omega$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\Omega$ ne rencontre pas $\mathcal{S}$, à l'exception de $I_n$.

## Exercice 1

Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $\mathcal{H}$ l'hyperbole de $\mathbb{R}^2$ d'équation cartésienne :

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

On notera $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les asymptotes de $\mathcal{H}$.

1. Donner des équations cartésiennes de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, ainsi qu'une paramétrisation de l'hyperbole.

2. Soit $M$ un point de l'hyperbole. Soient $A$ et $A'$ les points de concours de la tangente en $M$ avec $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Montrer que l'aire du triangle $(OAA')$ est constante.

## Exercice 2

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + {}^tM = I_3$ (*)

1. On suppose, dans cette question seulement, que $M$ est symétrique. Montrer que :

   a. $M$ est diagonalisable et $\operatorname{tr}(M) \times \det(M) \neq 0$.

   b. On suppose $\operatorname{tr}(M) \in \mathbb{R}_-^*$. Montrer que la suite matricielle $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

2. On revient au cas général. Prouver que $M$ est diagonalisable.

3. Montrer que $M$ est inversible si et seulement si $1 \notin \operatorname{Sp}(M)$.

4. Donner un exemple de matrice non symétrique satisfaisant (*).

## Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n$.

1. Montrer que l'application

$$\Phi : (P,Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)\, Q^{(k)}(0)$$

   définit un produit scalaire sur l'espace $E$.

2. À quoi ressemble la sphère unité pour la norme associée à ce produit scalaire lorsque $n = 2$ ?

3. Montrer que l'ensemble $F = \{P(X) \in E \mid P(0) = 0\}$ est un sous-espace de $E$ et calculer sa dimension, puis la distance $d(1,F)$.

## Exercice 2

Soit $p = 2r + 1$ un entier impair. Soit la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis

$$A = \frac{J + J^{-1}}{2} \quad \text{dans} \quad \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

1. Montrer que la matrice $A$ est diagonalisable.

2. Montrer que la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice de projection que l'on précisera.

3. Étudier la suite de polygones $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ définie par :

   – le polygone $\mathcal{P}_0$ est un polygone comportant $p$ sommets ;

   – si $\mathcal{P}_\mathrm{n}$ est un polygone comportant $p$ sommets, on forme le nouveau polygone $\mathcal{P}_{\mathrm{n}+1}$ à $p$ sommets en remplaçant chaque sommet $S$ de $\mathcal{P}_\mathrm{n}$ par le milieu du segment $[R,T]$, où $R$ et $T$ sont les deux sommets entourant le sommet $S$ dans le polygone $\mathcal{P}_\mathrm{n}$.

## Exercice 1

Trouver toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = xf(-x)$$

## Exercice 2

Soit $f : [1, +\infty[ \to ]0, +\infty[$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ tend vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

1. Démontrer que la série de terme général $f(n)$ converge.
2. Trouver un équivalent de

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$$

lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

Soit $A$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & t & t \\ 1 & 0 & t \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où $t$ est un réel.

On s'aidera du logiciel de calcul formel fourni.

1. Calculer le polynôme caractéristique de $A$ ? Pour quelles valeurs de $t$ admet-il des racines multiples ?

   Pour quelles valeurs de $t$ est-il scindé dans $\mathbb{R}[X]$ ? dans $\mathbb{C}[X]$ ?

   Pour quelles valeurs de $t$, la matrice $A$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ? dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ ?

2. Montrer que si la suite $(A^n)_n$ converge vers une matrice non nulle alors 1 est valeur propre de $A$.

   Prouver alors qu'il existe une seule valeur de $t$, pour laquelle $(A^n)_n$ converge vers une matrice non nulle. Que vaut alors la limite ?

   Calculer quelques puissances de $A$ et vérifier le résultat précédent.

3. Trouver toutes les valeurs de $t$ pour lesquelles la suite $(A^n)_n$ converge vers la matrice nulle.

1. On considère les deux matrices $A$ et $B$, avec

$$A = \begin{pmatrix} -24 & -48 & -233 & -21 \\ 21 & 41 & 189 & 17 \\ -2 & -4 & -18 & -2 \\ 6 & 14 & 75 & 11 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 60 & 270 & 30 \\ -150 & -321 & -1590 & -150 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 300 & 600 & 2910 & 279 \end{pmatrix}$$

   a. Vérifier que $A$ et $B$ commutent.

   b. Vérifier que $A$ est diagonalisable et préciser ses éléments propres.

   c. Déterminer un polynôme $S$ de degré 3 tel que $B = S(A)$.

2. Pour $n$ entier au moins égal à 2 et $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose

$$\mathcal{C}_M = \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ N\,M = M\,N\}$$

   a. Vérifier que $\mathcal{C}_M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant la matrice unité $I_n$ et stable pour la multiplication des matrices carrées.

   b. Montrer que pour tout $P$ de $\mathbb{R}[X]$, $P(M) \in \mathcal{C}_M$.

   c. A-t-on, pour tout $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'égalité

$$\mathcal{C}_M = \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists P \in \mathbb{R}[X] \mid N = P(M)\}$$

3. 
   a. Montrer que

$$N \in \mathcal{C}_A \iff \exists Q \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } N = Q(A)$$

   b. Déterminer ce polynôme pour les matrices $A^4$ et $A^{-1}$.

   c. Existe-t-il un polynôme $Q$ de $\mathbb{R}[X]$ tel que ${}^tA = Q(A)$ ?

Soit $f$ la fonction définie sur $]-1,1[$ par

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $x$ de $]-1,1[$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 (1+x)^t \mathrm{d}t$.

2. En déduire que $f$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.

   On écrira ce développement sous la forme $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en exprimant $a_n$ sous la forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

3. À l'aide du logiciel de calcul formel, calculer $a_0, \dots, a_{10}$.

   Vérifier le résultat en formant le développement limité de $f$ à l'ordre 10 au voisinage de 0.

4. Pour $n \geqslant 1$, quel est le signe de $a_n$ ?

5. Montrer que pour tout $x$ dans $[0,1[$ et pour tout entier $p \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} |a_n| x^n \leqslant 1$. Que peut-on en déduire quant à la série $\sum a_n$ ?

6. Déterminer théoriquement $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Vérifier avec le logiciel de calcul formel.

7. Montrer que $f$ est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle :

   $$(1+x)(xy' - y) + y^2 = 0$$

   En déduire que pour tout entier naturel $n$ non nul :

   $$(n-2)a_{n-1} + (n-1)a_n + \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 0$$

   Vérifier pour les premières valeurs de $n$ à l'aide du logiciel de calcul formel.

On considère la surface $\Sigma$ d'équation dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, $F(x,y,z)=0$ avec

$$F(x,y,z)=2x^2+2y^2+z^2+2xz-2yz+x-y-z+3$$

1. Représenter cette surface à l'aide du logiciel fourni.

   Quelle est sa nature ? Trouver une équation réduite dans un repère orthonormé que l'on précisera.

2. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M$ de $\Sigma$ tels que la droite $(OM)$ soit tangente à $\Sigma$.

   Montrer que $\mathcal{C}$ est l'intersection de $\Sigma$ avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x-y-z+6=0$.

3. Trouver un repère orthonormé dont le premier vecteur est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et le second a une composante selon $\vec{k}$ nulle.

   Déterminer l'équation de $\mathcal{C}$ dans ce repère. Quelle est la nature de $\mathcal{C}$ ?

   Donner un paramétrage de $\mathcal{C}$ et représenter sur un même graphique $\Sigma$ et $\mathcal{C}$.

  