CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

*Oral*

# Mathématiques 1

# MP

$n \in \mathbb{N}^*$

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dira que $M$ a la propriété (P) si, et seulement si, il existe une matrice $U \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $M$ soit la sous-matrice de $U$ obtenue en supprimant les dernières ligne et colonne de $U$ et que $U$ soit une matrice orthogonale, soit encore si, et seulement si, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n+1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix} & & & \alpha_{2n+1} \\ & M & & \vdots \\ & & & \vdots \\ \alpha_1 & \cdots & \cdots & \alpha_{n+1} \end{pmatrix} \in O_{n+1}(\mathbb{R})$$

1. Ici

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les $\lambda_i$ pour que $M$ ait la propriété (P).

2. Ici $M \in S_n(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $M$ ait la propriété (P).

3. Si $M \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $M = US$. On admettra qu'une telle décomposition existe encore si $M$ n'est pas inversible.

4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque ait la propriété (P). Cette condition portera sur ${}^tMM$.

5. Montrer le résultat admis dans la question 3.

On note $E$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,\,1[$, à valeurs réelles et de carré intégrable sur $[0,\,1[$. On note, $\|f\|_2$ la norme définie par

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f(t)^2 dt\right)^{1/2}$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier que $t \mapsto t^n f(t)$ est intégrable sur $[0,\,1[$.

On note alors $a_n(f) = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que $\displaystyle\int_{-1}^1 P(t)dt + i\int_0^\pi P\left(e^{i\theta}\right)e^{i\theta}d\theta = 0$.

   En déduire que $\displaystyle\int_0^1 P(t)^2 dt \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left|P\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta$.

3. Vérifier que si $f \in E$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^n a_k(f)^2 = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n a_k(f)t^k\right) f(t)dt$. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} a_k(f)^2$ converge et que l'on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(f)^2 \leqslant \pi\|f\|_2^2$$

4. On pose, pour $f \in E$, $N(f) = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(f)^2\right)^{1/2}$. Montrer que $N$ est une norme sur $E$.

5. Montrer que $N$ n'est pas équivalente à la norme $\|\cdot\|_2$. On pourra considérer les fonctions $f_p$ définies, pour $p \leq 1$ par

$$f_p(x) = \begin{cases} \sqrt{p} & \text{si } x \in [0,\,1/p] \\ 1/\sqrt{x} & \text{si } x \in\, ]1/p,\,1[ \end{cases}$$

On considère l'équation différentielle $(E) : x'(t) = \cos(2\pi(x(t) - t))$.

1. Rappeler l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz qui s'applique ici.

2. Soit $x$ une solution de $(E)$. Montrer que $x$ est lipshitzienne.

3. Soit $x$ une solution maximale de $(E)$ et $I = ]a, b[$ son intervalle de définition.

   Montrer que $I = \mathbb{R}$.

4. Si $x$ est solution maximale de $(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$, vérifier que $t \mapsto x(t + k)$ et $k + x$ sont encore solutions.

   Trouver des solutions simples de $(E)$.

On se fixe pour la suite une solution maximale de $(E)$.

5. Montrer que $t \in \mathbb{R} \mapsto x(t) - t$ converge en $\pm\infty$ et exprimer les limites en fonction de $x(0)$.

6. On considère maintenant une solution maximale $x$ de

$$(E_2) \ : \ x'(t) = \frac{1}{1 + x(t)^2} + \cos(2\pi(x(t) - t))$$

   Montrer que $x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et que $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto x(t) - t$ est bornée.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

*Oral*

# Mathématiques 1

# MP

$\mathbb{R}^n$ est muni de la structure euclidienne canonique.

1. Comment détermine-t-on les extrémums d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n$ fixé dans $\mathbb{N}^*$) ?

2. Étudier l'existence d'extrémums de la fonction $f$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur $\mathbb{R}^3$ par
$$(x, y, z) \mapsto (2x + y - z)(x + y + 2z)$$

3. Déterminer les extrémums de la fonction $f$ dans la boule unité fermée de $\mathbb{R}^3$.

4. $E$ étant un espace vectoriel euclidien, $f$ et $g$ étant deux formes linéaires non nulles sur $E$, déterminer les extrémums globaux de la fonction $fg$ dans la boule unité fermée de $E$ en utilisant des vecteurs représentants $f$ et $g$ à travers le produit scalaire.

On pose $f(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)}$

1. Étudier l'ensemble de définition de $f$.
2. Donner un équivalent de $f$ en 0.
3. Montrer que le graphe de $f$ admet une symétrie d'axe $x = \frac{1}{2}$.
4. Montrer que $f$ est continue sur son ensemble de définition.
5. Calculer la borne inférieure de $f$.

On note, pour $k \in \{0,1\}$, $S_k$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, $2\pi$-périodiques, à valeurs complexes telles que $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \left|n^k c_n(f)\right|$ converge (où $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ désigne la suite des coefficients de Fourier de $f$).

On considère $f$ une fonction de $S_1$, $r$ un réel tel que $0 < r < 1$ et on définit $f_r$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_r(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) r^{|n|} e^{inx}$$

1. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} r^n \sin(nx)$ et en déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \frac{\cos(nx)}{n} = -\frac{1}{2} \ln\left(1 - 2r\cos(x) + r^2\right).$$

2. On pose $K_r(t) = -\dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1-2r\cos(t)+r^2}{2}\right)$.
   Montrer qu'il existe une unique fonction $u$ dans $S_0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_r(x-t)u(t)dt = f_r(x).$$

   On déterminera les coefficients de Fourier de $u$ en fonction de ceux de $f$ et on vérifiera que $u$ est indépendante de $r$.

3. Vérifier que pour $t \in ]0,\pi[$,

$$\left|\ln\left(\frac{1-2r\cos(t)+r^2}{2}\right)\right| \leqslant \ln 2 - 2\ln|\sin t|$$

4. En déduire que

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} K_r(x-t)u(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1-\cos(x-t)\right)u(t)\mathrm{d}t$$

5. Pour $g \in S_0$, on définit $\varphi(g)$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1-\cos(x-t)\right)g(t)\mathrm{d}t$$

   Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme de $S_0$ sur $S_1$.

Soit $E$ un espace euclidien ; on note $\mathcal{O}(E)$ le groupe des endomorphismes othogonaux de $E$ et on définit l'ensemble

$$\Gamma = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \forall x \in E, \|u(x)\| \leqslant \|x\|\}$$

1. Montrer que $\Gamma$ est une partie convexe de $\mathcal{L}(E)$ qui contient $\mathcal{O}(E)$.

2. Soit $u \in \Gamma$ tel qu'il existe $(f,g) \in \Gamma^2$ vérifiant $f \neq g$ et $u = \frac{1}{2}(f+g)$.

   Montrer que $u \notin \mathcal{O}(E)$.

3. Soit $v$ un automorphisme de $E$, montrer qu'il existe $\rho \in \mathcal{O}(E)$ et $s$ un endomorphisme autoadjoint positif de $E$ tels que $v = \rho \circ s$.

   On admet que ce résultat reste valable si on ne suppose plus que $v$ est bijectif.

4. Soit $u \in \Gamma$ qui n'est pas un endomorphisme orthogonal.

   Montrer qu'il existe $(f,g) \in \Gamma^2$ tels que $f \neq g$ et $u = \dfrac{1}{2}(f+g)$.

5. Démontrer le résultat admis à la question 3.

1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   À quelle conditions nécessaires et suffisantes sur $a, b, c$ existe-t-il $P \in O_2(\mathbb{R})$ tel que $A = PB\,{}^tP$ ?

   À quelle conditions nécessaires et suffisantes sur $a$ existe-t-il $b, c \in \mathbb{R}$ et $P \in O_2(\mathbb{R})$ tels que $A = PB\,{}^tP$ ?

   À quelle conditions nécessaires et suffisantes sur $c$ existe-t-il $a, b \in \mathbb{R}$ et $P \in O_2(\mathbb{R})$ tel que $A = PB\,{}^tP$ ?

2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   À quelle conditions nécessaires et suffisantes sur $a, b, c, d$ existe-t-il $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $A = PBP^{-1}$ ?

   À quelle conditions nécessaires et suffisantes sur $a$ existe-t-il $b, c, d \in \mathbb{R}$ et $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tels que $A = PBP^{-1}$ ?

   À quelle conditions nécessaires et suffisantes sur $d$ existe-t-il $a, c, b \in \mathbb{R}$ et $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $A = PBP^{-1}$ ?

3. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, justifier l'existence de $\max\limits_{P,Q \in O_n(\mathbb{R})} \det(PA\,{}^tP + QB\,{}^tQ)$.

4. Calculer ce maximum si $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\sup\limits_{P,Q \in GL_n(\mathbb{R})} \det(PAP^{-1} + QBQ^{-1})$ est-il fini en général ? (Si oui le montrer, si non donner un contre-exemple)

6. De manière générale, si $A_1, \dots, A_k \in S_2^+(\mathbb{R})$, déterminer $\max\limits_{P_1,\dots,P_k \in O_2(\mathbb{R})} \det(P_1A_1\,{}^tP_1 + \dots + P_kA_k\,{}^tP_k)$.

1. Soient $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ trois complexes deux à deux distincts et $P_k(X) = (X - \lambda_k)^{m_k}$, avec $m_k \geqslant 1$ pour $k = 1{,}2{,}3$ trois polynômes de $\mathbb{C}[X]$.

   Montrer qu'il existe un polynôme $U_1 \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P_1$ divise $U_1P_2P_3 - 1$.

   On choisit de même $U_2$ tel que $P_2$ divise $U_2P_1P_3 - 1$ et $U_3$ tel que $P_3$ divise $U_3P_1P_2 - 1$.

2. On pose alors $P = \lambda_1U_1P_2P_3 + \lambda_2U_2P_1P_3 + \lambda_3U_3P_1P_2$. Quel est le reste de la division euclidienne de $P$ par $P_k$ pour $k = 1{,}2{,}3$ ?

   À l'aide du logiciel de calcul formel, construire un tel polynôme $P$ dans le cas où $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 5$ et $m_1 = m_2 = m_3 = 2$.

   *Indication* : on pourra utiliser l'instruction `gcdex(R,S,X,'U','V')` de Maple ou `PolynomialExtendedGCD[R,S,X]` de Mathematica qui fournit un couple `U, V` dans l'égalité de Bezout pour le pgcd des polynômes `P, Q` de l'indéterminée `X`.

3. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -12272 & -2 & 2 & -12267 & -12266 \\ 1 & -1758 & 0 & 2 & -1757 & -1758 \\ -1 & 3802 & -1 & -4 & 3803 & 3805 \\ -1 & -435 & 1 & -1 & -437 & -438 \\ -1 & 1682 & 1 & -1 & 1679 & 1679 \\ 0 & 95 & -1 & -1 & 97 & 97 \end{pmatrix}$$

   de $\mathcal{M}_6(\mathbb{C})$.

   Déterminer les éléments propres de $A$ et de la matrice $P(A)$ où $P$ est le polynôme déterminé à la **question 2**. Les matrices $A$, $P(A)$ sont-elles diagonalisables ?

4. Soit $n \geqslant 2$ et $B$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique

$$(-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

   Montrer qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, le polynôme $P_i = (X - \lambda_i)^{m_i}$ divise $R - \lambda_i$.

   Montrer que la matrice $R(B)$ est diagonalisable, avec les mêmes valeurs propres et les mêmes multiplicités que celles de $B$.

# Mathématiques 2

*Oral*

**MP**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

On définit une suite d'entiers $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par : $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$ et pour $n \geqslant 4$, $u_n = u_{n-2} + u_{n-3}$.

L'objectif de l'exercice est de montrer la propriété

$$\text{(P) : pour tout entier premier } p\text{, l'entier } u_p \text{ est divisible par } p$$

1. Cette question doit être traitée avec le logiciel de calcul formel.

   a. Écrire une fonction permettant de calculer $u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

   b. Vérifier que (P) semble satisfaite en se limitant aux mille plus petits entiers premiers.

2. On note $r_1$, $r_2$, $r_3$ les trois racines de $P(X) = X^3 - X - 1$ dans $\mathbb{C}$. On définit la série entière

$$\sum_{n\geqslant 1} u_n t^n$$

   de la variable réelle $t$ et on note $f(t)$ sa somme.

   a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $u_n = r_1^n + r_2^n + r_3^n$. Préciser le rayon de convergence $R$ de la série entière.

   b. Pour tout $t \in \left]-R, R\right[$, montrer que

$$f(t) = \frac{2t^2 + 3t^3}{1 - t^2 - t^3}$$

   c. On définit l'application $t \mapsto \varphi(t) = -\ln(1 - t^2 - t^3)$. On note le développement en série entière de $\varphi$ à l'origine :

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n t_n$$

   Établir une relation entre $u_n$ et $v_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   d. Soit $p$ un entier premier. Montrer que $v_p$ est un rationnel dont le dénominateur (dans la forme simplifiée de $v_p$) est premier avec $p$. En déduire que $u_p$ est divisible par $p$.

Dans cet exercice, on confondra polynôme et fonction polynomiale.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ :
$$\int_0^1 P_n(t)Q_n(t)dt = Q(0)$$

2. Cette question est à traiter avec le logiciel de calcul formel.

   a. Calculer les polynômes $P_n$ pour $n = 0,\dots,5$. On pourra déterminer chaque $P_n$ en résolvant un système de $n+1$ équations.

   b. Sur un même graphique, représenter $P_0,\dots,P_5$ sur l'intervalle [0,1].

3. Montrer que $P_n$ s'annule $n$ fois sur l'intervalle ]0,1[. Que peut-on en conclure pour $P_n$ ?

4.

   a. Pour quelles valeurs du réel $x$ l'intégrale
$$\int_0^1 P_n(t)t^x dt$$
   est-elle définie ?

   b. À l'aide du logiciel de calcul formel, obtenir une expression de
$$\int_0^1 P_n(t)t^x dt$$
   pour $n = 0,\dots,3$ sous forme d'une fraction rationnelle factorisée.

   Déterminer alors la valeur de cette intégrale pour tout $n$.

   c. Calculer $P_n(0)$.

   d. Déduire de ce qui précède la valeur de
$$\max\{|Q(0)|/Q \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 Q^2(t)dt = 1\}$$

5.

   a. Déterminer un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et une propriété P convenable faisant de la famille $(P_n)$ l'unique famille de polynômes échelonnée en degré, orthogonale pour ce produit scalaire et vérifiant la propriété P.

   b. Retrouver ainsi, par une autre méthode, les polynômes $P_0,\dots,P_5$ de la question 2.

L'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure affine euclidienne orientée canonique est rapporté au repère canonique orthonormé direct $\mathcal{R} = (O,\, i,j,k)$. On considère les plans $P_1$ d'équation $y = 0$ et $P_2$ d'équation $x = 0$.

On appelle écart angulaire de deux plans affines $P$, $P'$ dont $n$, $n'$ sont des vecteurs normaux unitaires, le réel $\theta \in [0, \pi/2]$ tel que $\cos\theta = |(n \mid n')|$.

1. Déterminer, par leur équation cartésienne, les plans $P$ passant par $O$, faisant avec $P_1$ et $P_2$ les écarts angulaires suivants : $(P_1,P) = \pi/4$ et $(P_2,P) = \pi/3$.

   On désigne désormais par $P_3$ le plan d'équation $x + \sqrt{2}y + z = 0$.

2. 
   a. Donner une équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}$ de la surface $(\Sigma)$ ensemble des points $M$ tels que
   $$\sum_{i=1}^{3} d^2(M,P_i) = 1$$
   b. Avec le logiciel de calcul formel, visualiser la surface obtenue puis justifier précisément sa nature.

3. Soit $W$ le vecteur unitaire
   $$W = \frac{\sqrt{3}}{3}(-\sqrt{2}i + j\,)$$
   On recherche les plans parallèles à la direction $W$ dont la section avec $(\Sigma)$ est un cercle.

   a. Quels sont les vecteurs $U$ unitaires orthogonaux à $W$ ? Utiliser un repère orthonormé direct $\mathcal{R}' = (O,\, U,V,W)$ pour résoudre le problème posé. Il est demandé d'utiliser le logiciel de calcul formel pour effectuer les calculs et pour rechercher l'équation de $(\Sigma)$ dans $\mathcal{R}'$.

   b. Montrer qu'on obtient deux directions de plans possibles. Préciser les équations cartésiennes dans le repère $\mathcal{R} = (O,\, i,j,k)$ des plans qui conviennent. Pour chacune des directions, visualiser avec le logiciel l'une des sections circulaires obtenues.

On pose, pour $z$ complexe

$$\begin{cases} P(z) = z^3 - 1 \\ F(z) = z - \dfrac{P(z)}{P'(z)} & \text{si } z \text{ est non nul} \end{cases}$$

Soit $r$ un réel de $]0,1[$ et $D$ le disque fermé de centre 1 et de rayon $r$.

On définit une suite $(u_n)$ par $u_0 \in \mathbb{C}$ et $u_{n+1} = F(u_n)$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$.

Les différents calculs de cet exercice doivent être menés avec le logiciel de calcul formel.

1.
   a. Calculer $(u_n)$ pour $n \in \{1,..,10\}$ lorsque $u_0 = 1 + i$ puis $u_0 = -1 + i$

   b. Montrer que pour tout $z$ de $D$

   $$|F(z) - 1| \leqslant \frac{2r+3}{3(1-r)^2}|z-1|^2$$

   c. Montrer que si $r = 1/3$ alors $F(D) \subset D$.

   d. En déduire que pour $u_0$ suffisamment proche de 1, la suite $(u_n)$ est bien définie et converge vers 1.

2. On considère une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe $C^1$ pour laquelle il existe $a$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que $f(a) = 0$ et que $df(a)$, la différentielle de $f$ en $a$, est inversible.

   On pose pour $u$ dans $\mathbb{R}^2$, $F(u) = u - df(u)^{-1}(f(u))$ et on définit encore une suite $(u_n)$ par $u_0 \in \mathbb{C}$ et $u_{n+1} = F(u_n)$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$.

   a. Calculer $F(a)$ et montrer que $F$ est bien définie sur un voisinage de $a$.

   b. Cette question est à résoudre avec le logiciel de calcul formel. On suppose uniquement dans cette question, que $f(x,y) = (x + y - 3,\ xy - 2)$ et $a = (1,2)$.

   Calculer $F$ et sa différentielle en $a$ puis calculer $u_n$ pour $n \in \{1,\dots,10\}$ lorsque $u_0 = (6,10)$ puis $u_0 = (-6,10)$.

   *On revient au cas général.*

   c. Montrer que $F$ est différentiable en $a$ de différentielle nulle.

   d. En déduire que la suite $(u_n)$ converge vers $a$ si $u_0$ est assez proche de $a$.

   e. Que peut-on dire de la vitesse de convergence de la suite $(u_n)$ si l'on suppose que $F$ est de classe $C^2$ ?

Soit $E$ l'espace vectoriel des fonctions réelles, définies, continues et bornées sur $\mathbb{R}_+^*$

Cet espace est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}_+^*} |f(x)|$

On considère un réel $a \in ]0, 1/4[$ et une fonction $Q : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$, telle que pour tout $x > 0$, $0 \leqslant Q(x) \leqslant a$.

1. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \lambda_{n+1} = \lambda_n^2 + a \end{cases}$$

   a. On choisit ici $a = 1/8$. Tracer, avec le logiciel de calcul formel, les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto x^2 + 1/8$ et $x \mapsto x$ sur[0,4].

   b. On revient au cas général. Démontrer que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

2. Soit $u \in E$. Démontrer que la fonction

$$\mathcal{F}(u) : x > 0 \mapsto x \int_x^{+\infty} \frac{u^2(t)}{t^2} dt + Q(x)$$

   est un élément de $E$.

3. On définit alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E$ par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \mathcal{F}(\mathrm{u_n}) \end{cases}$$

   a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leqslant u_n(x) \leqslant \lambda_n$.

   b. Cette question est à traiter avec le logiciel de calcul formel.

   On suppose ici que $Q(x) = e^{-x}/8$.

   Calculer $u_n$ pour $n \in \{1, \dots, 7\}$ et tracer les graphes de ces fonctions sur l'intervalle ]0,4].

4. On revient au cas général.

   a. Démontrer que la série de fonctions $\sum(n_{n+1} - u_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$. Qu'en déduit-on pour la suite $(u_n)$ ?

   b. Démontrer qu'il existe une fonction $u \in E$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad u(x) = x \int_x^{+\infty} \frac{u^2(t)}{t^2} dt + Q(x)$$

   c. Conclure que $u$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle.

On considère le système différentiel $S$ suivant :

$$S : \begin{cases} x'(t) = x(t)\,(10 - x(t) - y(t)) \\ y'(t) = y(t)\,(-6 + x(t) - y(t)) \end{cases}$$

Dans tout l'exercice, il est fortement conseillé d'utiliser le logiciel de calcul formel pour les calculs.

1. Déterminer l'unique solution $(x,y)$ de $S$ avec $x$ et $y$ fonctions constantes non nulles.

Dans la suite, on notera $\alpha$, $\beta$ les valeurs respectives de ces fonctions constantes $x$ et $y$.

2. À l'aide du logiciel de calcul formel, déterminer l'allure des solutions vérifiant respectivement les conditions initiales suivantes :

$$(x(0), y(0)) \in \{(10, 10),\ (1, 1),\ (2, 6)\}$$

   Que remarquez-vous ?

Soit maintenant $X = (x,y)$ une solution maximale de $S$. On va justifier l'existence d'un voisinage $U$ de $\Omega = (\alpha,\beta)$, dans $\mathbb{R}^2$ tel que, s'il existe $t_0$ pour lequel $X(t_0)$ appartient à $U$, alors la solution $X$ est définie sur $[t_0, +\infty[$ et converge vers $\Omega$ à vitesse exponentielle.

3. Calculer la matrice jacobienne de l'application $f : (x,y) \mapsto ((x(10 - x - y), y(-6 + x - y))$ au point $\Omega$ et déterminer ses valeurs propres.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont complexes non réelles et qu'on note $a + ib$ et $a - ib$. Justifier que A est semblable à

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

   Montrer qu'il existe un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ noté $(\cdot \mid \cdot)$ tel que :

$$\forall X \in \mathbb{R}^2, \quad (AX \mid X) = a\|X\|^2$$

   où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

5. Justifier l'existence d'un réel $r > 0$ tel que

$$\forall X \in B(\Omega,r), \quad (f(X) - f(\Omega) \mid X - \Omega) \leqslant -\|X - \Omega\|^2$$

   Conclure à l'aide de l'application $t \mapsto \|X(t) - \Omega\|^2$

  