 $n \in \mathbb{N}^*$ 

Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on dira que  $M$  a la propriété (P) si, et seulement si, il existe une matrice  $U \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  telle que  $M$  soit la sous-matrice de  $U$  obtenue en supprimant les dernières ligne et colonne de  $U$  et que  $U$  soit une matrice orthogonale, soit encore si, et seulement si, il existe  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n+1} \in \mathbb{R}$  tels que

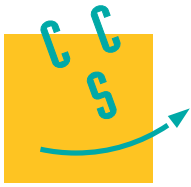
$$\begin{pmatrix} & & & \alpha_{2n+1} \\ & M & & \vdots \\ & & & \vdots \\ \alpha_1 & \cdots & \cdots & \alpha_{n+1} \end{pmatrix} \in O_{n+1}(\mathbb{R})$$

1. Ici

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les  $\lambda_i$  pour que  $M$  ait la propriété (P).

2. Ici  $M \in S_n(\mathbb{R})$ . Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que  $M$  ait la propriété (P).
3. Si  $M \in GL_n(\mathbb{R})$ , montrer qu'il existe  $U \in O_n(\mathbb{R})$  et  $S \in S_n(\mathbb{R})$  telles que  $M = US$ . On admettra qu'une telle décomposition existe encore si  $M$  n'est pas inversible.
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  quelconque ait la propriété (P). Cette condition portera sur  ${}^tMM$ .
5. Montrer le résultat admis dans la question 3.



On note  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[0, 1[$ , à valeurs réelles et de carré intégrable sur  $[0, 1[$ .  
On note,  $\|f\|_2$  la norme définie par

$$\|f\|_2 = \left( \int_0^1 f(t)^2 dt \right)^{1/2}$$

1. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , justifier que  $t \mapsto t^n f(t)$  est intégrable sur  $[0, 1[$ .

On note alors  $a_n(f) = \int_0^1 t^n f(t) dt$ .

2. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ , montrer que  $\int_{-1}^1 P(t) dt + i \int_0^\pi P(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = 0$ .

En déduire que  $\int_0^1 P(t)^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi |P(e^{i\theta})|^2 d\theta$ .

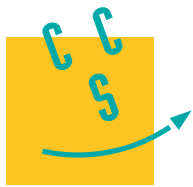
3. Vérifier que si  $f \in E$ , alors  $\sum_{k=0}^n a_k(f)^2 = \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^n a_k(f) t^k \right) f(t) dt$ . En déduire que la série  $\sum_{k \geq 0} a_k(f)^2$  converge et que l'on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(f)^2 \leq \pi \|f\|_2^2$$

4. On pose, pour  $f \in E$ ,  $N(f) = \left( \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(f)^2 \right)^{1/2}$ . Montrer que  $N$  est une norme sur  $E$ .

5. Montrer que  $N$  n'est pas équivalente à la norme  $\|\cdot\|_2$ . On pourra considérer les fonctions  $f_p$  définies, pour  $p \leq 1$  par

$$f_p(x) = \begin{cases} \sqrt{p} & \text{si } x \in [0, 1/p] \\ 1/\sqrt{x} & \text{si } x \in ]1/p, 1[ \end{cases}$$



On considère l'équation différentielle  $(E) : x'(t) = \cos(2\pi(x(t) - t))$ .

1. Rappeler l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz qui s'applique ici.
2. Soit  $x$  une solution de  $(E)$ . Montrer que  $x$  est lipschitzienne.
3. Soit  $x$  une solution maximale de  $(E)$  et  $I = ]a, b[$  son intervalle de définition.

Montrer que  $I = \mathbb{R}$ .

4. Si  $x$  est solution maximale de  $(E)$  et  $k \in \mathbb{Z}$ , vérifier que  $t \mapsto x(t+k)$  et  $k+x$  sont encore solutions.

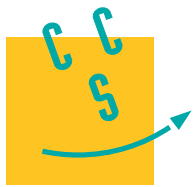
Trouver des solutions simples de  $(E)$ .

On se fixe pour la suite une solution maximale de  $(E)$ .

5. Montrer que  $t \in \mathbb{R} \mapsto x(t) - t$  converge en  $\pm\infty$  et exprimer les limites en fonction de  $x(0)$ .
6. On considère maintenant une solution maximale  $x$  de

$$(E_2) : x'(t) = \frac{1}{1+x(t)^2} + \cos(2\pi(x(t) - t))$$

Montrer que  $x$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et que  $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto x(t) - t$  est bornée.



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

# Mathématiques 1

Oral

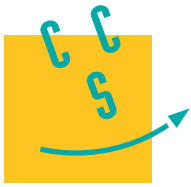
MP

$\mathbb{R}^n$  est muni de la structure euclidienne canonique.

1. Comment détermine-t-on les extrémums d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  ( $n$  fixé dans  $\mathbb{N}^*$ ) ?
2. Étudier l'existence d'extrémums de la fonction  $f$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , définie sur  $\mathbb{R}^3$  par

$$(x, y, z) \mapsto (2x + y - z)(x + y + 2z)$$

3. Déterminer les extrémums de la fonction  $f$  dans la boule unité fermée de  $\mathbb{R}^3$ .
4.  $E$  étant un espace vectoriel euclidien,  $f$  et  $g$  étant deux formes linéaires non nulles sur  $E$ , déterminer les extrémums globaux de la fonction  $fg$  dans la boule unité fermée de  $E$  en utilisant des vecteurs représentants  $f$  et  $g$  à travers le produit scalaire.



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

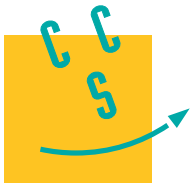
# Mathématiques 1

*Oral*

**MP**

On pose  $f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}$

1. Étudier l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Donner un équivalent de  $f$  en 0.
3. Montrer que le graphe de  $f$  admet une symétrie d'axe  $x = \frac{1}{2}$ .
4. Montrer que  $f$  est continue sur son ensemble de définition.
5. Calculer la borne inférieure de  $f$ .



On note, pour  $k \in \{0, 1\}$ ,  $S_k$  l'ensemble des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodiques, à valeurs complexes telles que  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n^k c_n(f)|$  converge (où  $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$  désigne la suite des coefficients de Fourier de  $f$ ).

On considère  $f$  une fonction de  $S_1$ ,  $r$  un réel tel que  $0 < r < 1$  et on définit  $f_r$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_r(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) r^{|n|} e^{inx}$$

1. Calculer, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \sin(nx)$  et en déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \frac{\cos(nx)}{n} = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2r \cos(x) + r^2).$$

2. On pose  $K_r(t) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 - 2r \cos(t) + r^2}{2}\right)$ .

Montrer qu'il existe une unique fonction  $u$  dans  $S_0$  telle que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_r(x-t) u(t) dt = f_r(x).$$

On déterminera les coefficients de Fourier de  $u$  en fonction de ceux de  $f$  et on vérifiera que  $u$  est indépendante de  $r$ .

3. Vérifier que pour  $t \in ]0, \pi[$ ,

$$\left| \ln\left(\frac{1 - 2r \cos(t) + r^2}{2}\right) \right| \leq \ln 2 - 2 \ln |\sin t|$$

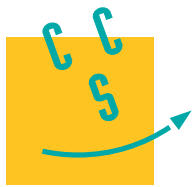
4. En déduire que

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} K_r(x-t) u(t) dt = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - \cos(x-t)) u(t) dt$$

5. Pour  $g \in S_0$ , on définit  $\varphi(g)$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - \cos(x-t)) g(t) dt$$

Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $S_0$  sur  $S_1$ .



Soit  $E$  un espace euclidien ; on note  $\mathcal{O}(E)$  le groupe des endomorphismes orthogonaux de  $E$  et on définit l'ensemble

$$\Gamma = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|\}$$

1. Montrer que  $\Gamma$  est une partie convexe de  $\mathcal{L}(E)$  qui contient  $\mathcal{O}(E)$ .
2. Soit  $u \in \Gamma$  tel qu'il existe  $(f, g) \in \Gamma^2$  vérifiant  $f \neq g$  et  $u = \frac{1}{2}(f + g)$ .

Montrer que  $u \notin \mathcal{O}(E)$ .

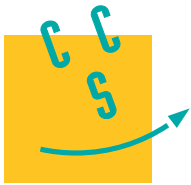
3. Soit  $v$  un automorphisme de  $E$ , montrer qu'il existe  $\rho \in \mathcal{O}(E)$  et  $s$  un endomorphisme autoadjoint positif de  $E$  tels que  $v = \rho \circ s$ .

On admet que ce résultat reste valable si on ne suppose plus que  $v$  est bijectif.

4. Soit  $u \in \Gamma$  qui n'est pas un endomorphisme orthogonal.

Montrer qu'il existe  $(f, g) \in \Gamma^2$  tels que  $f \neq g$  et  $u = \frac{1}{2}(f + g)$ .

5. Démontrer le résultat admis à la question 3.



1.  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

À quelle conditions nécessaires et suffisantes sur  $a, b, c$  existe-t-il  $P \in O_2(\mathbb{R})$  tel que  $A = PB {}^tP$  ?

À quelle conditions nécessaires et suffisantes sur  $a$  existe-t-il  $b, c \in \mathbb{R}$  et  $P \in O_2(\mathbb{R})$  tels que  $A = PB {}^tP$  ?

À quelle conditions nécessaires et suffisantes sur  $c$  existe-t-il  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $P \in O_2(\mathbb{R})$  tel que  $A = PB {}^tP$  ?

2.  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

À quelle conditions nécessaires et suffisantes sur  $a, b, c, d$  existe-t-il  $P \in GL_2(\mathbb{R})$  tel que  $A = PBP^{-1}$  ?

À quelle conditions nécessaires et suffisantes sur  $a$  existe-t-il  $b, c, d \in \mathbb{R}$  et  $P \in GL_2(\mathbb{R})$  tels que  $A = PBP^{-1}$  ?

À quelle conditions nécessaires et suffisantes sur  $d$  existe-t-il  $a, c, b \in \mathbb{R}$  et  $P \in GL_2(\mathbb{R})$  tel que  $A = PBP^{-1}$  ?

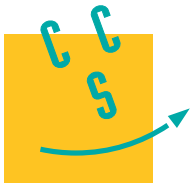
3. Si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , justifier l'existence de  $\max_{P, Q \in O_n(\mathbb{R})} \det(PA {}^tP + QB {}^tQ).$

4. Calculer ce maximum si  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$

5. Si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\sup_{P, Q \in GL_n(\mathbb{R})} \det(PAP^{-1} + QBQ^{-1})$  est-il fini en général ? (Si oui le montrer, si non donner un contre-exemple)

6. De manière générale, si  $A_1, \dots, A_k \in S_2^+(\mathbb{R})$ , déterminer  $\max_{P_1, \dots, P_k \in O_2(\mathbb{R})} \det(P_1 A_1 {}^t P_1 + \dots + P_k A_k {}^t P_k).$





1. Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  trois complexes deux à deux distincts et  $P_k(X) = (X - \lambda_k)^{m_k}$ , avec  $m_k \geq 1$  pour  $k = 1, 2, 3$  trois polynômes de  $\mathbb{C}[X]$ .

Montrer qu'il existe un polynôme  $U_1 \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $P_1$  divise  $U_1 P_2 P_3 - 1$ .

On choisit de même  $U_2$  tel que  $P_2$  divise  $U_2 P_1 P_3 - 1$  et  $U_3$  tel que  $P_3$  divise  $U_3 P_1 P_2 - 1$ .

2. On pose alors  $P = \lambda_1 U_1 P_2 P_3 + \lambda_2 U_2 P_1 P_3 + \lambda_3 U_3 P_1 P_2$ . Quel est le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $P_k$  pour  $k = 1, 2, 3$  ?

À l'aide du logiciel de calcul formel, construire un tel polynôme  $P$  dans le cas où  $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 5$  et  $m_1 = m_2 = m_3 = 2$ .

*Indication* : on pourra utiliser l'instruction `gcdex(R,S,X,'U','V')` de Maple ou `PolynomialExtendedGCD[R,S,X]` de Mathematica qui fournit un couple  $U, V$  dans l'égalité de Bezout pour le pgcd des polynômes  $P, Q$  de l'indéterminée  $X$ .

3. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -12272 & -2 & 2 & -12267 & -12266 \\ 1 & -1758 & 0 & 2 & -1757 & -1758 \\ -1 & 3802 & -1 & -4 & 3803 & 3805 \\ -1 & -435 & 1 & -1 & -437 & -438 \\ -1 & 1682 & 1 & -1 & 1679 & 1679 \\ 0 & 95 & -1 & -1 & 97 & 97 \end{pmatrix}$$

de  $\mathcal{M}_6(\mathbb{C})$ .

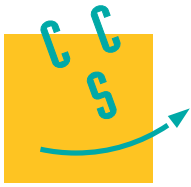
Déterminer les éléments propres de  $A$  et de la matrice  $P(A)$  où  $P$  est le polynôme déterminé à la **question 2**. Les matrices  $A, P(A)$  sont-elles diagonalisables ?

4. Soit  $n \geq 2$  et  $B$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de polynôme caractéristique

$$(-1)^n \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_i}$$

Montrer qu'il existe un polynôme  $R \in \mathbb{C}[X]$  tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ , le polynôme  $P_i = (X - \lambda_i)^{m_i}$  divise  $R - \lambda_i$ .

Montrer que la matrice  $R(B)$  est diagonalisable, avec les mêmes valeurs propres et les mêmes multiplicités que celles de  $B$ .



On définit une suite d'entiers  $(u_n)_{n \geq 1}$  par :  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 2$ ,  $u_3 = 3$  et pour  $n \geq 4$ ,  $u_n = u_{n-2} + u_{n-3}$ .

L'objectif de l'exercice est de montrer la propriété

(P) : pour tout entier premier  $p$ , l'entier  $u_p$  est divisible par  $p$

1. Cette question doit être traitée avec le logiciel de calcul formel.
  - a. Écrire une fonction permettant de calculer  $u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$
  - b. Vérifier que (P) semble satisfaite en se limitant aux mille plus petits entiers premiers.
2. On note  $r_1, r_2, r_3$  les trois racines de  $P(X) = X^3 - X - 1$  dans  $\mathbb{C}$ . On définit la série entière

$$\sum_{n \geq 1} u_n t^n$$

de la variable réelle  $t$  et on note  $f(t)$  sa somme.

- a. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que  $u_n = r_1^n + r_2^n + r_3^n$ . Préciser le rayon de convergence  $R$  de la série entière.
- b. Pour tout  $t \in ]-R, R[$ , montrer que

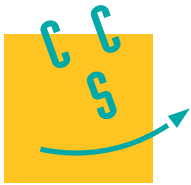
$$f(t) = \frac{2t^2 + 3t^3}{1 - t^2 - t^3}$$

- c. On définit l'application  $t \mapsto \varphi(t) = -\ln(1 - t^2 - t^3)$ . On note le développement en série entière de  $\varphi$  à l'origine :

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n t^n$$

Établir une relation entre  $u_n$  et  $v_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- d. Soit  $p$  un entier premier. Montrer que  $v_p$  est un rationnel dont le dénominateur (dans la forme simplifiée de  $v_p$ ) est premier avec  $p$ . En déduire que  $u_p$  est divisible par  $p$ .



Dans cet exercice, on confondra polynôme et fonction polynomiale.

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que, pour tout polynôme  $Q \in \mathbb{R}_n[X]$  :

$$\int_0^1 P_n(t)Q_n(t)dt = Q(0)$$

2. Cette question est à traiter avec le logiciel de calcul formel.

a. Calculer les polynômes  $P_n$  pour  $n = 0, \dots, 5$ . On pourra déterminer chaque  $P_n$  en résolvant un système de  $n + 1$  équations.

b. Sur un même graphique, représenter  $P_0, \dots, P_5$  sur l'intervalle  $[0,1]$ .

3. Montrer que  $P_n$  s'annule  $n$  fois sur l'intervalle  $]0,1[$ . Que peut-on en conclure pour  $P_n$  ?

4.

a. Pour quelles valeurs du réel  $x$  l'intégrale

$$\int_0^1 P_n(t)t^x dt$$

est-elle définie ?

b. À l'aide du logiciel de calcul formel, obtenir une expression de

$$\int_0^1 P_n(t)t^x dt$$

pour  $n = 0, \dots, 3$  sous forme d'une fraction rationnelle factorisée.

Déterminer alors la valeur de cette intégrale pour tout  $n$ .

c. Calculer  $P_n(0)$ .

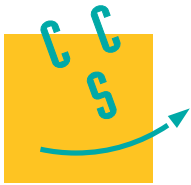
d. Dédurre de ce qui précède la valeur de

$$\max\{|Q(0)|/Q \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 Q^2(t)dt = 1\}$$

5.

a. Déterminer un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$  et une propriété  $P$  convenable faisant de la famille  $(P_n)$  l'unique famille de polynômes échelonnée en degré, orthogonale pour ce produit scalaire et vérifiant la propriété  $P$ .

b. Retrouver ainsi, par une autre méthode, les polynômes  $P_0, \dots, P_5$  de la question 2.



L'espace  $\mathbb{R}^3$  muni de sa structure affine euclidienne orientée canonique est rapporté au repère canonique orthonormé direct  $\mathcal{R} = (O, i, j, k)$ . On considère les plans  $P_1$  d'équation  $y = 0$  et  $P_2$  d'équation  $x = 0$ .

On appelle écart angulaire de deux plans affines  $P, P'$  dont  $n, n'$  sont des vecteurs normaux unitaires, le réel  $\theta \in [0, \pi/2]$  tel que  $\cos \theta = |(n | n')|$ .

1. Déterminer, par leur équation cartésienne, les plans  $P$  passant par  $O$ , faisant avec  $P_1$  et  $P_2$  les écarts angulaires suivants :  $(P_1, P) = \pi/4$  et  $(P_2, P) = \pi/3$ .

On désigne désormais par  $P_3$  le plan d'équation  $x + \sqrt{2}y + z = 0$ .

2.

- a. Donner une équation cartésienne dans le repère  $\mathcal{R}$  de la surface  $(\Sigma)$  ensemble des points  $M$  tels que

$$\sum_{i=1}^3 d^2(M, P_i) = 1$$

- b. Avec le logiciel de calcul formel, visualiser la surface obtenue puis justifier précisément sa nature.

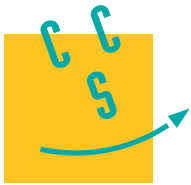
3. Soit  $W$  le vecteur unitaire

$$W = \frac{\sqrt{3}}{3}(-\sqrt{2}i + j)$$

On recherche les plans parallèles à la direction  $W$  dont la section avec  $(\Sigma)$  est un cercle.

- a. Quels sont les vecteurs  $U$  unitaires orthogonaux à  $W$ ? Utiliser un repère orthonormé direct  $\mathcal{R}' = (O, U, V, W)$  pour résoudre le problème posé. Il est demandé d'utiliser le logiciel de calcul formel pour effectuer les calculs et pour rechercher l'équation de  $(\Sigma)$  dans  $\mathcal{R}'$ .

- b. Montrer qu'on obtient deux directions de plans possibles. Préciser les équations cartésiennes dans le repère  $\mathcal{R} = (O, i, j, k)$  des plans qui conviennent. Pour chacune des directions, visualiser avec le logiciel l'une des sections circulaires obtenues.



On pose, pour  $z$  complexe

$$\begin{cases} P(z) = z^3 - 1 \\ F(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)} \end{cases} \text{ si } z \text{ est non nul}$$

Soit  $r$  un réel de  $]0,1[$  et  $D$  le disque fermé de centre 1 et de rayon  $r$ .

On définit une suite  $(u_n)$  par  $u_0 \in \mathbb{C}$  et  $u_{n+1} = F(u_n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

Les différents calculs de cet exercice doivent être menés avec le logiciel de calcul formel.

1.

- Calculer  $(u_n)$  pour  $n \in \{1, \dots, 10\}$  lorsque  $u_0 = 1 + i$  puis  $u_0 = -1 + i$
- Montrer que pour tout  $z$  de  $D$

$$|F(z) - 1| \leq \frac{2r + 3}{3(1-r)^2} |z - 1|^2$$

- Montrer que si  $r = 1/3$  alors  $F(D) \subset D$ .
  - En déduire que pour  $u_0$  suffisamment proche de 1, la suite  $(u_n)$  est bien définie et converge vers 1.
2. On considère une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$  pour laquelle il existe  $a$  dans  $\mathbb{R}^2$  tel que  $f(a) = 0$  et que  $df(a)$ , la différentielle de  $f$  en  $a$ , est inversible.

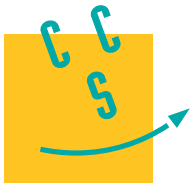
On pose pour  $u$  dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $F(u) = u - df(u)^{-1}(f(u))$  et on définit encore une suite  $(u_n)$  par  $u_0 \in \mathbb{C}$  et  $u_{n+1} = F(u_n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

- Calculer  $F(a)$  et montrer que  $F$  est bien définie sur un voisinage de  $a$ .
- Cette question est à résoudre avec le logiciel de calcul formel. On suppose uniquement dans cette question, que  $f(x,y) = (x + y - 3, xy - 2)$  et  $a = (1,2)$ .

Calculer  $F$  et sa différentielle en  $a$  puis calculer  $u_n$  pour  $n \in \{1, \dots, 10\}$  lorsque  $u_0 = (6,10)$  puis  $u_0 = (-6,10)$ .

*On revient au cas général.*

- Montrer que  $F$  est différentiable en  $a$  de différentielle nulle.
- En déduire que la suite  $(u_n)$  converge vers  $a$  si  $u_0$  est assez proche de  $a$ .
- Que peut-on dire de la vitesse de convergence de la suite  $(u_n)$  si l'on suppose que  $F$  est de classe  $C^2$  ?



Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions réelles, définies, continues et bornées sur  $\mathbb{R}_+^*$

Cet espace est muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  définie par  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}_+^*} |f(x)|$

On considère un réel  $a \in ]0, 1/4[$  et une fonction  $Q : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , telle que pour tout  $x > 0$ ,  $0 \leq Q(x) \leq a$ .

1. Soit  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite réelle définie par

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \lambda_{n+1} = \lambda_n^2 + a \end{cases}$$

a. On choisit ici  $a = 1/8$ . Tracer, avec le logiciel de calcul formel, les représentations graphiques des fonctions  $x \mapsto x^2 + 1/8$  et  $x \mapsto x$  sur  $[0, 4]$ .

b. On revient au cas général. Démontrer que la suite  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et préciser sa limite.

2. Soit  $u \in E$ . Démontrer que la fonction

$$\mathcal{F}(u) : x > 0 \mapsto x \int_x^{+\infty} \frac{u^2(t)}{t^2} dt + Q(x)$$

est un élément de  $E$ .

3. On définit alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \mathcal{F}(u_n) \end{cases}$$

a. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $0 \leq u_n(x) \leq \lambda_n$ .

b. Cette question est à traiter avec le logiciel de calcul formel.

On suppose ici que  $Q(x) = e^{-x}/8$ .

Calculer  $u_n$  pour  $n \in \{1, \dots, 7\}$  et tracer les graphes de ces fonctions sur l'intervalle  $]0, 4]$ .

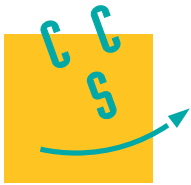
4. On revient au cas général.

a. Démontrer que la série de fonctions  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge normalement sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Qu'en déduit-on pour la suite  $(u_n)$  ?

b. Démontrer qu'il existe une fonction  $u \in E$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad u(x) = x \int_x^{+\infty} \frac{u^2(t)}{t^2} dt + Q(x)$$

c. Conclure que  $u$  est solution sur  $\mathbb{R}_+^*$  d'une équation différentielle.



On considère le système différentiel  $S$  suivant :

$$S : \begin{cases} x'(t) = x(t)(10 - x(t) - y(t)) \\ y'(t) = y(t)(-6 + x(t) - y(t)) \end{cases}$$

Dans tout l'exercice, il est fortement conseillé d'utiliser le logiciel de calcul formel pour les calculs.

1. Déterminer l'unique solution  $(x, y)$  de  $S$  avec  $x$  et  $y$  fonctions constantes non nulles.

Dans la suite, on notera  $\alpha, \beta$  les valeurs respectives de ces fonctions constantes  $x$  et  $y$ .

2. À l'aide du logiciel de calcul formel, déterminer l'allure des solutions vérifiant respectivement les conditions initiales suivantes :

$$(x(0), y(0)) \in \{(10, 10), (1, 1), (2, 6)\}$$

Que remarquez-vous ?

Soit maintenant  $X = (x, y)$  une solution maximale de  $S$ . On va justifier l'existence d'un voisinage  $U$  de  $\Omega = (\alpha, \beta)$ , dans  $\mathbb{R}^2$  tel que, s'il existe  $t_0$  pour lequel  $X(t_0)$  appartient à  $U$ , alors la solution  $X$  est définie sur  $[t_0, +\infty[$  et converge vers  $\Omega$  à vitesse exponentielle.

3. Calculer la matrice jacobienne de l'application  $f : (x, y) \mapsto ((x(10 - x - y), y(-6 + x - y))$  au point  $\Omega$  et déterminer ses valeurs propres.
4. Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  dont les valeurs propres sont complexes non réelles et qu'on note  $a + ib$  et  $a - ib$ . Justifier que  $A$  est semblable à

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Montrer qu'il existe un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^2$  noté  $(\cdot | \cdot)$  tel que :

$$\forall X \in \mathbb{R}^2, \quad (AX | X) = a\|X\|^2$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

5. Justifier l'existence d'un réel  $r > 0$  tel que

$$\forall X \in B(\Omega, r), \quad (f(X) - f(\Omega) | X - \Omega) \leq -\|X - \Omega\|^2$$

Conclure à l'aide de l'application  $t \mapsto \|X(t) - \Omega\|^2$