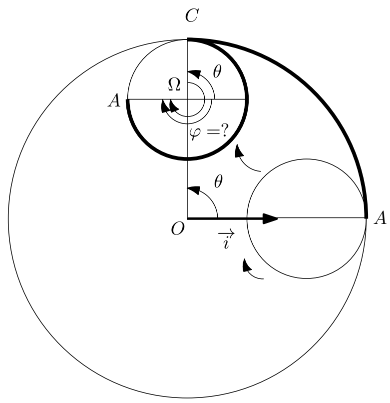
Pour préparer la rentrée

1 Howto

- Ne PAS aller voir sur le web ou vos feuilles d'exercices de l'année.
- Chercher seul au brouillon, et RÉDIGER une première solution.
- Si on sèche, alors faire un tour par les indications, chercher à nouveau puis rédiger.
- Vérifier qu'on a raconté une partie de ce qui n'aurait pas du être écrit.
- Se repentir.
- Rédiger à nouveau.
- Rédemption.
- Vérifier que dans la rédaction de ces exercices, le nombre d'utilisation du symbole «$\Longrightarrow$» est très exactement de... zéro.

2 Onze exercices de choix

1. Montrer que la suite u de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est convergente. Montrer également que la suite v de terme général $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ possède une limite, qu'on déterminera :-)
2. Calculer sous la forme d'un produit/quotient de cosinus et sinus, pour $x \neq 0$ $[2\pi]$:
$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$$
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice n, c'est-à-dire telle que $A^n = 0$, avec $A^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,i}| > \displaystyle\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.
5. Soit f la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = x^2$ pour tout $x \in [0, 2\pi[$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$: $a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$ ainsi que $b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$. Calculer enfin $E(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt$.
6. Étudier la suite u définie par son premier terme $u_0 = 930$ et la relation $u_{n+1} = \tanh u_n$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \mathrm{Im}\,(u^n)$ et $K_n = \mathrm{Ker}\,(u^n)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset K_{n+1}$ et $I_{n+1} \subset I_n$. Montrer de plus que si $K_{n_0} = K_{n_0+1}$, alors $K_{n_0} = K_{n_0+p}$ pour tout $p \geqslant 1$. Prouver le résultat équivalent pour les I_n.
8. Un disque de rayon R roule à l'intérieur d'un disque de rayon $3R$. Au temps $t = 0$, le point de contact est en $(3R, 0)$, et on suit ce point A attaché au petit disque.



Justifier que le point A suit une trajectoire décrite par : $z_A(\theta) = 2R\mathrm{e}^{i\theta} + R\mathrm{e}^{-2i\theta}$. Étudier et représenter cet arc. Calculer sa longueur ainsi que l'aire du domaine intérieur ainsi formé. Calculer également la courbure en tout point birégulier.

9. Soient A, B et C trois points d'affixes a, b et c sommets d'un triangle équilatéral. Montrer :

$$(a+b+c)^2 = 3(a^2+b^2+c^2).$$

Réciproquement, on suppose cette relation vérifiée. En notant $g = \frac{1}{3}(a+b+c)$, $a' = a-g$, $b' = b-g$ et $c' = c-g$, montrer que a', b' et c' sont les racines d'un polynôme assez simple. En déduire que les points d'affixes a, b et c sont sommets d'un triangle équilatéral.

10. Montrer que lorsque (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$, la quantité $f(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (t^2-(at+b))^2\mathrm{e}^{-t}dt$ possède un minimum, qu'on déterminera. On introduira un produit scalaire adéquat dans un espace adéquat, et on fera un joli dessin.

11. Résoudre l'équation différentielle $(\sin t)y' - (\cos t)y = 0$ sur $]0,\pi[$, $]-\pi,\pi[$ puis $\mathbb{R}$.

3 Des indications

1. Pour majorer une somme de la forme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$ avec f monotone, on peut comparer $f(k)$ à une intégrale (après avoir fait un dessin puis une preuve), et sommer ces majorations. Pour minorer... c'est pareil !
2. La somme demandée est peut-être reliée à une somme d'exponentielles... et une suite géométrique n'est probablement pas loin.
3. L'endomorphisme u canoniquement associé à A vérifie $u^{n-1} \neq 0$, donc il existe $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. La famille $(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ est alors probablement libre, et la matrice de u dans cette base nous laisse penser qu'on y est presque.
4. Il suffit de montrer que l'endomorphisme u canoniquement associé est injectif. Pour cela, on suppose $u(x) = 0$. On obtient alors n équations. Pour avoir un gros terme relativement aux autres, il est raisonnable de choisir i_0 tel que $|x_{i_0}|$ soit maximal. Avec un coup d'inégalité triangulaire et sous l'hypothèse $x \neq 0$, on arrive à une contradiction.
5. Commencer par faire un dessin et justifier qu'on peut intégrer sur $[0, 2\pi]$. Ensuite, il s'agit de faire des intégrations par parties. Il faudra maîtriser ces sombres histoires de «moins par moins», mais également les «moins par moins par moins», et plus si affinités.
6. Faire un dessin, rappeler rapidement (puis prouver) le signe de $\tanh x - x$ en fonction de x. Localiser la suite (prouver que tous les u_n sont dans tel intervalle), en déduire la monotonie, la convergence, puis soigneusement la valeur de la limite.
7. On pourra montrer que si $K_n = K_{n+1}$, alors $K_{n+1} = K_{n+2}$...
8. On calcule le vecteur vitesse directement en complexe : après une manipulation standard de type $\mathrm{e}^{ia} - \mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^{i(a+b)/2}(...)$, on tombera sur une jolie forme qui nous donne la norme de la vitesse, mais

aussi l'angle α entre «l'horizontale» et le vecteur vitesse. En intégrant $\|V\|$, on aura la longueur. Pour l'aire, Green-Riemann nous dit d'intégrer par exemple $\frac{1}{2}(xy'-x'y)=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{V}\right]$. Et voici peut-être la seule occasion de votre vie d'utiliser une formule du cours : $[v_1,v_2]=\operatorname{Im}(z_1\overline{z_2})$! Pour la courbure, on connaît $\alpha(\theta)$ et $\|V\|=\frac{ds}{d\theta}$, donc la courbure $\gamma=\frac{d\alpha}{ds}$ n'est pas trop compliquée à évaluer...

9. Oubliez le théorème sur les relations coefficients-racines, et développez $(X-a')(X-b')(X-c')$.
10. Si on note $E=\mathbb{R}[X]$ et qu'on le munit d'un produit scalaire probablement déjà rencontré en cours/TD, on a alors $f(a,b)=\left\|X^2-(aX+b)\right\|^2$, et il semble alors pertinent de faire intervenir a_0X+b_0 le projeté orthogonal de X^2 sur $F=\mathbb{R}_1[X]$. Un dessin, Pythagore et deux-trois calculs font le reste.
11. Pour construire une solution sur $]-\pi,\pi[$, on fait une analyse-synthèse : SI je suis solution sur $]-\pi,\pi[$, alors mes restrictions à $]-\pi,0[$ et $]0,\pi[$ sont solutions de l'équation, donc de la forme... Réciproquement, si je suis de la forme... suis-je solution de l'équation sur $]-\pi,\pi[$? Déjà, suis-je bien dérivable en tout point ? Etc...

4 Ce que vous n'aurez pas écrit, oulala non

On ne dira pas :

1. «La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par v_n donc...» Par contre, majorer par une constante est probablement une bonne idée.
2. «C'est une suite géométrique avec tant de termes....». Non. On connaît $1+q+\cdots+q^N$ et puis c'est tout. Si ça commence par autre chose, on factorise le premier terme.
3. «Dans telle base, telle matrice s'écrit...». Non. Pour écrire une matrice autrement, on peut juste changer de couleur de crayon. Si elle n'est pas triangulaire à un instant t_0, elle ne le sera jamais.
4. «Cette matrice est injective».
5. «Ce calcul, je sais le faire ; je passe donc à la suite».
6. «Sur tel intervalle, la suite est (dé)croissante», ainsi qu'une dizaine d'autres bêtises...
7. «$K_n=K_{n+1}$, donc $u^n=u^{n+1}$».
8. «La courbure, j'y comprends rien».
9. «Les relations coefficients-racines, j'y comprends rien».
10. «Pourquoi faire un dessin alors que tout cela est évident ?»
11. «On peut prolonger la dérivée en posant...». Par contre, il existe effectivement un résultat qui nous parle de la dérivabilité d'une fonction prolongée...

5 Des extensions

1. Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour qu'il y ait convergence de la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$, puis éventuellement $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^\alpha(\ln k)^\beta}$.
2. Calculer, pour $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, les noyaux de Dirichlet et de Fejér : $D_n(x)=\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}$ et $F_n(x)=\displaystyle\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x)$.
3. Montrer qu'en dimension 3, tout endomorphisme nilpotent non-nul se représente dans une base adaptée par la matrice $N_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ ou $N_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. De même, en dimension 4 parmi

les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En dimension 3 comme en dimension 4, on pourra commencer par montrer que ces configurations sont mutuellement incompatibles (il ne peut exister deux bases telles qu'un endomorphisme donné soit représenté dans l'une et l'autre base par deux matrices différentes parmi celles proposées).

Plus difficile : montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, alors il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure. *On pourra raisonner par récurrence.*

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 3$. On note $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice telle que : $v_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   Montrer que si $V - \lambda I_n$ est non inversible, alors $|\lambda| \leqslant 2$.

   (b) Supposons que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie :
   - pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,i}| \geqslant \displaystyle\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$;
   - il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|a_{i_0,i_0}| > \displaystyle\sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|$;
   - la matrice A est «irréductible» au sens : si on considère le graphe (a priori asymétrique) constitué des sommets $\{1, 2, ..., n\}$, avec une arête de i vers j si et seulement si $a_{i,j} \neq 0$, alors ce graphe est connexe.

   Montrer que A est inversible.

   (c) En déduire qu'avec les notations de la question 4a, on a en fait $|\lambda| < 2$.

   (d) Pour ceux qui veulent aller encore plus loin sur la matrice V : on peut montrer que les $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $V - \lambda I_n \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont les $2 \sin \dfrac{k\pi}{n+1}$, pour $k \in [\![1, n]\!]$. On suppose pour cela : $VX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, et on en déduit une relation vérifiée par les x_i : elle est linéaire d'ordre 2, si on a eu le bonne idée de poser $x_0 = x_{n+1} = 0$. La condition $x_{n+1} = 0$ donne alors, en notant ρ_1 et ρ_2 les racines de $X^2 - \lambda X + 1$: $\left(\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{n+1} = 1$. On a par ailleurs $\rho_1 \rho_2 = 1$; etc...

   (e) Soit A une matrice de permutation ($a_{i,j} = \delta_{j,\sigma(i)}$, avec $\sigma \in \mathcal{S}_n$). Montrer que si $A - \lambda I_n$ est non inversible, alors $|\lambda| \leqslant 1$.

   En décomposant σ en produit de cycles, on peut même montrer que λ est une racine k-ème de l'unité, avec k la longueur d'un cycle de σ.

   (f) Soit A une matrice stochastique, c'est-à-dire à coefficients positifs dont la somme sur chaque ligne vaut 1. Montrer que si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible, alors $|\lambda| \leqslant 1$.

5. La quasi totalité des exemples pratiques auxquels vous serez confrontés lors de l'étude des séries de Fourier est regroupée ici : `http://blog.mp933.fr/public/dmmp/2011_2012/DM08-ENONCE.pdf`

6. Montrer que la suite des dimensions des K_n est concave, au sens :

$$\dim(K_{n+2}) - \dim(K_{n+1}) \leqslant \dim(K_{n+1}) - \dim(K_n).$$

   On pourra pour cela appliquer le théorème du rang à la restruction de u à $\mathrm{Im}\,(u^n)$.

   Énoncer et prouver le résultat symétrique pour les images itérées.

7. Trouver α tel que $\dfrac{1}{u_{n+1}^{\alpha}} - \dfrac{1}{u_n^{\alpha}}$ converge vers une limite non nulle, et en déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$, en utilisant le lemme de Cesàro (voir vos feuilles d'exercices... ou google !).

8. Donner l'affixe du centre de courbure $\Omega_\theta = M_\theta + R_\theta \overrightarrow{N}$, avec $\overrightarrow{N}$ le deuxième vecteur du repère de frenet. Prouver que la courbe obtenue est image de la courbe initiale par une homothétie. Vous pouvez aussi rejouer avec des rayons $4R$ et R, et aussi faire tourner le petit cercle à l'extérieur du grand. Après coup, allez voir `http://blog.mp933.fr/public/maplemp/2011_2012/depart.pdf`